HÀM NHIỀU BIẾN

1. **Định nghĩa Hàm 2 biến.**

$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$M(x, y) \mapsto z = f(M) = f(x, y)$

Miền xác định của hàm f(x,y) là miền $D \subset \mathbb{R}^2$ sao cho f(x,y) có nghĩa.

VD: $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$M(x, y) \mapsto z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Miền xác định của hàm f(x,y) là tập hợp những điểm $M(x, y) \in D$ sao cho

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1$$

Vậy D là …………………

Đồ thị hàm số f(x,y)

$$\begin{cases} z \geq 0 \\ z^2 = 1 - x^2 - y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \geq 0 \\ z^2 + x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

ĐN Đường đẳng trị: là tập hợp các điểm M(x,y) sao cho f(x,y)=const. (hằng số)

VD: $f(x, y) = x^2 + y^2 = 1$: …………………………

2. **Giới hạn và liên tục**

2.1. Khoảng cách giữa 2 điểm, dãy điểm.

Cho 2 điểm M(x,y), $M_0(x_0, y_0)$ thì $d(M, M_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \geq 0$

Cho dãy điểm $M_0(x_0, y_0), M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), ..., M_k(x_k, y_k)$

Dãy điểm M_k hội tụ đến M_0 ký hiệu $M_k \to M_0$

nếu $d(M_k, M_0) \to 0$ $(x_k \to x_0, y_k \to y_0)$

2.2. Lân cận tại một điểm

Cho $M_0(x_0, y_0), \quad r > 0, \quad B(M_0, r) = \{M \in \mathbb{R}^2 / d(M, M_0) < r\}$ lân cận của điểm M_0

Đây là dĩa tròn tâm tại M_0 và bán kính là r (không lấy biên).

$M_0(x_0, y_0), \quad r > 0, \quad B'(M_0, r) = \{M \in \mathbb{R}^2 / d(M, M_0) \leq r\}$: dĩa tròn lấy biên

$M_0(x_0, y_0), \quad r > 0, \quad \partial B(M_0, r) = \{M \in \mathbb{R}^2 / d(M, M_0) = r\}$

Do đó $B'(M_0, r) = B(M_0, r) + \partial B(M_0, r)$

2.3. Giới hạn hàm 2 biến.

$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$M(x, y) \mapsto z = f(M)$

Hàm f(x,y) có giới hạn là a khi M tiến đến M_0 ta viết $f(M) \to a \quad khi \quad M \to M_0$ nếu

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall M \in D, 0 < d(M, M_0) < \delta \Rightarrow \left| f(M) - a \right| < \varepsilon$

Ký hiệu $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = a$

VD1: Tính $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{xy^2}{2 - \sqrt{4 + xy^2}}$

VD2:Tính $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (x^2 + y^2) \sin\left(\dfrac{1}{xy}\right)$

VD3: Tính $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

Chọn hai dãy $(x_n, y_n) = \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right); (x'_n, y'_n) = \left(\dfrac{2}{n}, \dfrac{1}{n}\right)$, chuyển về giới hạn một biến.

2.4. Liên tục tại một điểm.

Hàm f(x,y) liên tục tại $M_0(x_0, y_0)$ nếu nó thỏa 2 điều kiện

- Hàm f(x,y) xác định tại $M_0(x_0, y_0)$
- $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$

Hàm f(x,y) liên tục trên D nếu f(x,y) liên tục tại $M_0(x_0, y_0), \quad \forall M_0 \in D$

2.5. Định lý Weirestrass: Cho E là tập Compact, $E \in \mathbb{R}^2$, f(x,y) liên tục trên E. Khi ấy.

- f(x,y) bị chặn trên E.
- f(x,y) đạt GTLN, GTNN trên E.
  $\exists M(x_1, y_1), N(x_2, y_2) \in E : f(x_1, y_1) \le f(x, y) \le f(x_2, y_2)$
- E compact nếu
  - ✓ E đóng (nếu E chứa biên của nó)
  - ✓ E bị chặn (nếu có một hình tròn chứa nó $E \subset B(0, R)$)

    VD: $E = B'(0,1) = \{M \in \mathbb{R}^2 / d(M, 0) \le 1\}$

3. Đạo hàm-Vi phân.

3.1. Đạo hàm riêng.

Cho hàm $z = f(x,y)$. Đạo hàm riêng của hàm f(x,y) theo biến x tại $M_0(x_0,y_0)$

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x}$:
  ĐHR của f(x,y) theo biến x.
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0) = f'_y(x_0,y_0) = \lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}{\Delta y}$:
  ĐHR của f(x,y) theo biến y.

VD1: $f(x,y) = 3x^2y + y^3 + x^2$. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0) = ?; \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0) = ?$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy + 2x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 + 3y^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 3$$

VD2: $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2+y^3}$. Tính $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ?; \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = ?$

VD3: $f(x,y) = \ln(x^3 + e^y)$. Tính $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ?; \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = ?$

3.2. Hàm khả vi và vi phân toàn phần.

Hàm f(x,y) được gọi là khả vi tại $M_0(x_0,y_0)$ nếu số gia hàm số được biểu diễn.

$$\Delta f = \Delta z = A.\Delta x + B.\Delta y + O(d), \quad d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

Đại lượng: $A.\Delta x + B.\Delta y = df(x_0,y_0)$:vi phân toàn phần cấp 1 của hàm f(x,y) tại $M_0(x_0,y_0)$

<u>Định lý</u>: Nếu hàm $z = f(x,y)$ xác định trong lân cận của điểm $M_0(x_0,y_0)$ và các đạo hàm riêng f'_x, f'_y liên tục tại $M_0(x_0,y_0)$ thì $f(x,y)$ khả vi tại $M_0(x_0,y_0)$ và

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = A; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = B$$

Lúc đó $df(x_0,y_0) = A.\Delta x + B.\Delta y = f'_x(x_0,y_0).dx + f'_y(x_0,y_0).dy$

Vậy $\boxed{df = f'_x.dx + f'_y.dy \Rightarrow df(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0).dx + f'_y(x_0,y_0).dy}$

VD: Tính vi phân cấp 1 của hàm f(x,y) tại điểm (1,0) với $f(x,y) = e^{2x+y}$. $df(1,0) = ?$

<u>Ứng dụng vi phân tính gần đúng:</u>

$\Delta f = A.\Delta x + B.\Delta y + O(d), \quad \Rightarrow \Delta f \approx f'_x(x_0, y_0).\Delta x + f'_y(x_0, y_0).\Delta y$

$\Rightarrow f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx f'_x(x_0, y_0).\Delta x + f'_y(x_0, y_0).\Delta y$

$\Rightarrow f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0).\Delta x + f'_y(x_0, y_0).\Delta y$

$\Rightarrow f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0).\Delta x + f'_y(x_0, y_0).\Delta y$

$\Rightarrow f(M) \approx f(M_0) + f'_x(M_0).\Delta x + f'_y(M_0).\Delta y$

$$\Rightarrow f(M) \approx f(M_0) + df(M_0) \qquad (1)$$

VD: Tính gần đúng $\sqrt{(1,02)^3 + (1,99)^3}$

Xét hàm $f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3}$. Ta có: $x_0 = ..., y_0 = ..., \Delta x = ..., \Delta y = ..., f(x_0, y_0) = ...$

Tính $\begin{cases} f'_x = \\ f'_y = \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} f'_x(x_0, y_0) = \\ f'_y(x_0, y_0) = \end{cases}$

Thay vào công thức xấp xỉ (1) ta có:

$\sqrt{(1,02)^3 + (1,99)^3} \approx$

3.3. Đạo hàm theo hướng

Đạo hàm của hàm $f(x, y)$ theo hướng $\vec{u}(u_1, u_2)$ (vector đơn vị) tại $M_0(x_0, y_0)$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2) - f(x_0, y_0)}{t} \qquad (2)$$

- Nếu $\vec{u}(1,0); \quad u_1 = 1, u_2 = 0 \Rightarrow \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$: ĐHR theo x
- Nếu $\vec{u}(0,1); \quad u_1 = 0, u_2 = 1 \Rightarrow \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$: ĐHR theo y

<u>Định lý:</u> Cho $f(x, y)$ khả vi tại $M_0(x_0, y_0)$ thì tại đó nó có đạo hàm theo mọi hướng $\vec{u}(u_1, u_2)$ và

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)u_2 \qquad (3)}$$

Đặt $\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$: gradient của hàm f(x,y), $\vec{u}(u_1, u_2)$ thì

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x,y) = \left(\nabla f(x,y), \vec{u}\right) \qquad (4)}$$

<u>Chứng minh</u>: Vì hàm f(x,y) khả vi nên ta có:

$$\Delta f = \Delta z = A.\Delta x + B.\Delta y + \mathrm{O}(d)$$

$$\Leftrightarrow f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)tu_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)tu_2 + \mathrm{O}(d)$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)u_2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}\left(x_0, y_0\right) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)u_2 = f'_x(x_0, y_0)u_1 + f'_y(x_0, y_0)u_2$$

VD1:Tính đạo hàm của $f(x,y) = 3x^2y + y$ theo hướng $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$ tại M(1,2)

$$\begin{cases} f'_x = 6xy \\ f'_y = 3x^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_x(1,2) = 12 \\ f'_y(1,2) = 4 \end{cases}$$

$\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} = (2,1) \Rightarrow \vec{v}(v_1, v_2) = \dfrac{\vec{u}}{\left\|\vec{u}\right\|} = \dfrac{(2,1)}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$: vector đơn vị.

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,2) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)v_2 = 12.\frac{2}{\sqrt{5}} + 4.\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{28}{\sqrt{5}}$$

VD2: $f(x,y) = e^{2x+5y}$. $\nabla f(1,0) = ?$

$$\begin{cases} f'_x = ... \\ f'_y = ... \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_x(1,0) = ... \\ f'_y(1,0) = ... \end{cases} \Rightarrow \nabla f(1,0) = (....,....)$$

VD3: $f(x,y) = x^2e^y + y\sin x$. $\nabla f(x,y) = ?$

3.4. Đạo hàm riêng của hàm hợp

a) $z = f(x,y); \quad x = x(t); \quad y = y(t)$

Ta có: $z = z(t) \Rightarrow dz = z'_x dx + z'_y dy$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dt} = z'_x\frac{dx}{dt} + z'_y\frac{dy}{dt} = z'_x.x'_t + z'_y.y'_t$$

Do đó

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = z'_x.x'_t + z'_y.y'_t \quad (3.1)}$$

VD1: $z = x^2 + xy; \quad x = t^2; \quad y = 3t$

Chú ý: $z = f(x, y); \quad y = y(x)$

$$\boxed{\frac{dz}{dx} = z'_x.1 + z'_y.y'_x \quad (3.2)}$$

VD2: $z = x + \sin\left(\frac{y}{x}\right); \quad y = x^2$

b) $z = f(x, y); \quad x = x(u,v); \quad y = y(u,v)$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial u} = z'_x.x'_u + z'_y.y'_u \quad (3.3)}$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial v} = z'_x.x'_v + z'_y.y'_v \quad (3.4)}$$

VD3: $z = e^{xy}; \quad x = x(u,v) = u^2 + v^2, y = y(u,v) = u.v$

3.5. Đạo hàm riêng của hàm ẩn.

Định nghĩa: Phương trình F(x,y,z)=0 có thể xác định một hàm ẩn $z = z(x, y)$ với các điều kiện sau:

- Xác định, liên tục trong $B(M_0, \varepsilon), \quad M_0(x_0, y_0, z_0), \quad \varepsilon > 0$
- $F(x_0, y_0, z_0) = 0$
- $\exists\, F'_x, F'_y, F'_z$ liên tục trong $B(M_0, \varepsilon)$
- $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

thì $\begin{cases} z'_x = -\dfrac{F'_x}{F'_z} \\ z'_x = -\dfrac{F'_y}{F'_z} \end{cases}$

VD: Cho $xyz = x + y + z$. Tìm dz=?

Cách 1: Xem phương trình trên như là F(x,y,z)=xyz-x-y-z=0

$$\begin{cases} F'_x = ... \\ F'_y = ... \\ F'_z = ... \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z'_x = ... \\ z'_y = ... \end{cases} \qquad \Rightarrow dz =$$

Cách 2:Xem z=z(x,y), x,y là biến độc lập

Lấy vi phân 2 vế của phương trình xyz=x+y+z

4. Đạo hàm riêng cấp cao, vi phân toàn phần cấp cao.

4.1. Đạo hàm riêng cấp cao.

Xét hàm $z = f(x,y)$. ĐHR cấp 2 là ĐH của ĐHR cấp 1.Xét các ĐHR cấp 2 sau

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx} = z''_{xx}$: lấy ĐHR theo x 2 lần.

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx} = z''_{yx}$: lấy ĐHR theo y trước, x sau.

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy} = z''_{xy}$:lấy ĐHR theo x trước, y sau.

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy} = z''_{yy}$: lấy ĐHR theo y 2 lần.

VD: $f(x,y) = x^3y^2 + 2x^2y^2 + 4xy$

Ta có: $\begin{cases} f'_x = 3x^2y^2 + 4xy^2 + 4y \Rightarrow \begin{cases} f''_{xx} = 6xy^2 + 4y^2 \\ f''_{xy} = 6x^2y + 8xy + 4 \end{cases} \\ f'_y = 2x^3y + 4x^2y + 4x \Rightarrow f''_{yy} = 2x^3 + 4x^2 \end{cases}$

Định lý Schwarz (Đạo hàm hỗn hợp)

Nếu trong một lân cận $B(M_0, r)$ của điểm $M_0(x_0, y_0)$ hàm z=f(x,y) có các đạo hàm hỗn hợp và các đạo hàm này liên tục tại $M_0(x_0, y_0)$ thì

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$$

4.2. Vi phân toàn phần cấp cao.

Cho $z = f(x,y)$; x,y là biến độc lập, $\Delta x = dx = C_1, \quad \Delta y = dy = C_2$; C_1, C_2: hằng số.

Ta có:

$\boxed{df(x,y) = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy}$**: vi phân cấp 1**

$d^2 f(x,y) = d\left(df(x,y)\right) = d\left(f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy\right)$: vi phân cấp 2

$= d\left(f'_x(x,y)dx \right) + d\left(f'_y(x,y)dy \right)$

$= d\left(f'_x(x,y) \right).dx + d(dx).f'_x(x,y)dx + d\left(f'_y(x,y) \right).dy + d(dy).f'_y(x,y)dy$

$= d\left(f'_x(x,y) \right).dx + d\left(f'_y(x,y) \right).dy$

$= \left(f''_{xx}(x,y)dx + f''_{xy}(x,y)dy \right)dx + \left(f''_{yx}(x,y)dx + f''_{yy}(x,y)dy \right)dy$

$= f''_{xx}(x,y)dx^2 + 2f''_{xy}(x,y)dxdy + f''_{yy}(x,y)dy^2$

Do đó: $d^2 f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}.dx + \frac{\partial}{\partial y}.dy \right)^2 f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}.dx^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.dy^2 \right) f$

$d^2 f(x,y) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.dy^2 \right)$

$\boxed{d^2 f(x,y) = f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2}$ **: vi phân cấp 2.**

Suy ra: $\boxed{d^n f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}.dx + \frac{\partial}{\partial y}.dy \right)^n f}$ **: vi phân cấp n**

VD: Tìm vi phân toàn phần cấp 2 của hàm

$z = f(x,y) = 2x^2 - 3xy - y^2$

$z'_x = 4x - 3y \Rightarrow \begin{cases} z''_{xx} = 4 \\ z''_{xy} = -3 \end{cases}$

$z'_y = -3x - 2y \Rightarrow z''_{yy} = -2$

$d^2 f(x,y) = z''_{xx}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2 = 4dx^2 - 6dxdy - 2dy^2$

4.3. Công thức Taylor

Giả sử $z = f(x,y)$ có đạo hàm đến cấp n+1

$$= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0 + t.\Delta x, y_0 + t.\Delta y) = \varphi(t)$$

Nếu $t = 1 \Rightarrow \varphi(1) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x,y)$

$t = 0 \Rightarrow \varphi(0) = f(x_0, y_0)$

Vì $\varphi(t)$ có đạo hàm đến cấp (n+1) nên theo Công thức Maclaurin ta có:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!}t + \frac{\varphi''(0)}{2!}t^2 + \frac{\varphi'''(0)}{3!}t^3 + \ldots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta t)}{(n+1)!}t^{n+1}, \quad (0 < \theta < 1)$$

Nếu t=1 thì

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!} + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \frac{\varphi'''(0)}{3!} + \ldots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} + \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta t)}{(n+1)!}, \quad (0 < \theta < 1) \quad (1)$$

Mặt khác:

$\varphi(t) = f(x_0 + t.\Delta x, y_0 + t.\Delta y) = f(x, y).$

$\Rightarrow \varphi'(t) = f'_x.x'_t + f'_y.y'_t = f'_x.\Delta x + f'_y.\Delta y = df(x, y)$

$\Rightarrow \varphi'(0) = df(x_0, y_0)$

$$\varphi''(t) = \frac{d\left[\varphi'(t)\right]}{dt} = \frac{d\left[f'_x.x'_t + f'_y.y'_t\right]}{dt}$$

$$= \frac{d\left[f'_x.\dfrac{dx}{dt} + f'_y.\dfrac{dy}{dt}\right]}{dt} = d\left(f'_x dx + f'_y dy\right) = d(df(x, y)) = d^2 f(x, y)$$

$\Rightarrow \varphi''(0) = d^2 f(x_0, y_0)$

………………

Do đó: $\varphi^{(n)}(t) = d^n f(x, y) \Rightarrow \varphi^{(n)}(0) = d^n f(x_0, y_0)$

Thay vào (1) ta được công thức Taylor

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!} + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \frac{\varphi'''(0)}{3!} + ... + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} + \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta t)}{(n+1)!}, \quad (0 < \theta < 1) \quad (1)$$

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{df(x_0, y_0)}{1!} + \frac{d^2 f(x_0, y_0)}{2!} + ... + \frac{d^{(n)}(x_0, y_0)}{n!} + \frac{d^{(n+1)}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)}{(n+1)!}$$

Vậy $\boxed{f(x, y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{d^k f(x_0, y_0)}{k!} + \frac{d^{n+1} f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)}{(n+1)!}}$ **: Khai triển Taylor**

Nếu $x_0 = 0; y_0 = 0$ thì ta có khai triển Maclaurin.

Khai triển Maclaurin: $\boxed{f(x, y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{d^k f(0,0)}{k!} + \frac{d^{n+1} f(\theta\Delta x, \theta\Delta y)}{(n+1)!}}$

VD: Khai triển hàm $f(x, y) = x^2 y^3$ tại $x_0 = 1, y_0 = 1$ đến cấp 2

- $f(1,1) = 1$
- Vi phân cấp 1

$$\begin{cases} f'_x = 2xy^3 \\ f'_y = 3x^2 y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_x(1,1) = 2 \\ f'_y(1,1) = 3 \end{cases} \Rightarrow df(1,1) = 2.\Delta x + 3.\Delta y$$

- Vi phân cấp 2

$$\begin{cases} f''_{xx} = 2y^3 \\ f''_{xy} = 6xy^2 \\ f''_{yy} = 6x^2 y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f''_{xx}(1,1) = 2 \\ f''_{xy}(1,1) = 6 \\ f''_{yy}(1,1) = 6 \end{cases} \Rightarrow d^2 f(1,1) = 2.\Delta x^2 + 12.\Delta x.\Delta y + 6\Delta y^2$$

$$f(x,y) = f(1,1) + \frac{df(1,1)}{1!} + \frac{d^2 f(1,1)}{2!}$$
$$f(x,y) = x^2y^3 = 1 + 2(x-1) + 3(y-1) + (x-1)^2 + 6(x-1)(y-1) + 3(y-1)^2$$

BTVN:

1. Tính đạo hàm riêng cấp 1 theo từng biến của các hàm sau.

   $f\left(x,y\right) = x^2y^2 + ln(x^2 + y)$. Tính $\dfrac{\partial f}{\partial x}$

   $f(x,y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$

2. Tính vi phân cấp 1 của các hàm.

   $z(x,y) = \ln\left(\sin\dfrac{x}{y}\right)$

   $z = x^2 + 2^y$

   $z = \arctan\left(y - x\right)$.

3. Tính Gradient của các hàm.

   $z = xy + \sin\left(xy\right)$.

   $z(x,y) = (x+y)e^{xy}$.

4. Tính đạo hàm của hàm sau:

   $f(u,v) = u^2\sin v, \quad u = x^2 + y^2, \quad v = \dfrac{y}{x}$

5. Tính đạo hàm riêng cấp 2 của các hàm sau.

   Tính $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ nếu $f(x,y) = xy\sin^2 x$.

   $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ nếu $f(x,y) = 2^{xy}$

   Tìm đạo hàm riêng cấp hai z''_{xx} của hàm hai biến $z = xe^y + x^2y^2 + y\sin x$.

   Cho hàm hai biến $z = y\ln\left(xy\right)$. Tính z''_{xx}.

6. Tính vi phân cấp 2 của các hàm.

   Tìm vi phân cấp hai của hàm hai biến $z = e^{xy}$ tại $M_0(1,1)$.

   Tìm vi phân cấp hai của hàm hai biến $z = xe^{2y}$

5. Cực trị hàm nhiều biến(cực trị tự do)

5.1 Điều kiện cần của cực trị

ĐN cực trị: Điểm $P_0(x_0, y_0)$ _ cực tiểu nếu

$\exists B(P_0, \varepsilon)$ của P_0 sao cho $f(x_0, y_0) \le f(x, y)\ \forall\ (x, y) \in B(P_0, \varepsilon) \quad (x, y) \ne (x_0, y_0)$

Tương tự cho cực đại $f(x, y) \le f(x_0, y_0)$

Các điểm cực đại, cực tiểu gọi chung cực trị

Điểm dừng: Điểm (x_0, y_0) _ điểm dừng của $f(x, y)$ nếu $f_x^{'}(x_0, y_0) = f_y^{'}(x_0, y_0) = 0$

Định Lý (ĐK cần có cực trị): Nếu hàm $z = f(x, y)$ có cực trị tại $P_0(x_0, y_0)$ thì tại P_0 hàm số có các đạo hàm riêng =0(Điểm dừng).

5.2 ĐK đủ của cực trị

Định Lý: cho $f(x, y)$ xác định, liên tục và có đạo hàm riêng cấp 2 liên tục trong lân cận của điểm dừng $P_0(x_0, y_0)$.

Đặt $A = f_{xx}^{"}(x_0, y_0)$; $B = f_{xy}^{"}(x_0, y_0)$; $C = f_{yy}^{"}(x_0, y_0)$; $\Delta = AC - B^2$

- Nếu $\Delta > 0, A < 0 \Rightarrow P(x_0, y_0)$ là điểm cực đại của $f(x, y)$
- Nếu $\Delta > 0, A > 0 \Rightarrow P(x_0, y_0)$ là điểm cực tiểu của $f(x, y)$
- Nếu $\Delta < 0$ thì $P_0(x_0, y_0)$ không là điểm cực trị của $f(x, y)$

VD: Tìm cực trị $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

B1: Tìm điểm dừng.

Giải hệ pt $\begin{cases} f_x^{'} = 0 \\ f_y^{'} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ 3x^4 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 & (1) \\ x(x^3 - 1) = 0 & (2) \end{cases}$

$\overset{(2)}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{l} x = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} y = 0, \\ x = 1 \overset{(1)}{\Rightarrow} y = 1 \end{array} \right.$. Ta có 2 điểm dừng $P_1(0, 0), P_2(1,1)$

B2: Tìm cực trị từ điểm dừng, tính các đạo hàm riêng cấp 2

$$f_{xx}^{"} = 6x,\ f_{xy}^{"} = -3,\ f_{yy}^{"} = 6y$$

Thay từng điểm dừng vào các ĐHR cấp hai ta được các hằng số A, B, C

Với $P_1(0,0)$, ta có $A = f''_{xx}(0,0) = 0$, $B = f''_{xy}(0,0) = -3$, $C = f''_{yy}(0,0) = 0$, $\Delta = -9 < 0$

Kết luận: Điểm $P_1(0,0)$ …………………

Với $P_2(1,1)$, $A = f''_{xx}(1,1) = 6$, $B = f''_{xy}(1,1) = -3$, $C = f''_{yy}(1,1) = 6$,

Xét $\Delta = 36 - 9 = 27 > 0, A > 0$

Kết luận: Điểm $P_2(1,1)$ là điểm cực tiểu và $f(1,1) = -1$

<u>Chú ý:</u> Để xác định (x_0, y_0) là cực đại/ cực tiểu ta có thể xét

$d^2 f(x_0, y_0) = f''_{xx}(x_0, y_0)dx^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)dxdy + f''_{yy}(x_0, y_0)dy^2$ bằng cách xem $d^2 f(x_0, y_0)$ như là một dạng toàn phương của biến dx, dy

$$\Delta = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{matrix} \Delta_1 = A > 0 \\ \Delta_2 = \Delta > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow d^2 f(P_0) > 0 : \text{cực tiểu}$$

$$\left.\begin{matrix} \Delta_1 = A < 0 \\ \Delta_2 = \Delta > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow d^2 f(P_0) < 0 : \text{cực đại}$$

$\Delta < 0 \Rightarrow d^2 f(P_0)$ không xác định dấu $\rightarrow P_0$ không là cực trị

Tương tự cho hàm 3 biến $f(x, y, z) = w$

Điểm dừng $\begin{cases} f'_x(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0, z_0) = 0 \Rightarrow M_0(x_0, y_0, z_0) \text{ điểm dừng} \\ f'_z(x_0, y_0, z_0) = 0 \end{cases}$

$$d^2 f(M_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x}.dx + \frac{\partial}{\partial y}.dy + \frac{\partial}{\partial z}.dz \right)^2 f$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0)dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0)dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(M_0)dz^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0)dxdy + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(M_0)dydz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(M_0)dxdz$$

$$= f''_{xx}(M_0)dx^2 + f''_{yy}(M_0)dy^2 + f''_{zz}(M_0)dz^2 + 2f''_{xy}(M_0)dxdy + 2f''_{yz}(M_0)dydz + 2f''_{xz}(M_0)dxdz$$

Xét $\Delta = \begin{pmatrix} f''_{xx}(M_0) & f''_{xy}(M_0) & f''_{xz}(M_0) \\ f''_{yx}(M_0) & f''_{yy}(M_0) & f''_{yz}(M_0) \\ f''_{zx}(M_0) & f''_{zy}(M_0) & f''_{zz}(M_0) \end{pmatrix}$

- $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0 \Rightarrow d^2 f(M_0) > 0 \Rightarrow M_0$ cực tiểu
- $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0 \Rightarrow d^2 f(M_0) < 0 \Rightarrow M_0$ cực đại
- $d^2 f(M_0)$ không xác định dấu $\Rightarrow f(x,y)$ không đạt cực trị tại M_0

VD$_2$: $z: 2x^3 + y^2 - x^2 - 4x + 4y - 7$

$$\Rightarrow \begin{cases} z'_x = 6x^2 - 2x - 4 = 0 \\ z'_y = 2y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - x - 2 = 0 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1, x = -2/3 \\ y = -2 \end{cases}$$

Vậy ta có 2 điểm dừng $P_1(1,-2), P_2\left(-2/3, -2\right)$

Xét các đạo hàm riêng cấp 2

$$\Rightarrow \begin{cases} z''_{xx} = 12x - 2 \\ z''_{xy} = 0 \\ z''_{yy} = 2 \end{cases}$$

Với $P_1(1,-2)$ ta có

$$\Rightarrow \begin{cases} z''_{xx}(1,-2) = 12 \\ z''_{xy}(1,-2) = 0 \\ z''_{yy}(1,-2) = 2 \end{cases} \Rightarrow d^2 f(1,-2) = 12dx^2 + 2dy^2 > 0 \Rightarrow P_1(1,-2) \text{ là điểm cực tiểu}$$

Với $P_2\left(-2/3, -2\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} z''_{xx}\left(-2/3, -2\right) = 12 \\ z''_{xy}\left(-2/3, -2\right) = 0 \\ z''_{yy}\left(-2/3, -2\right) = 2 \end{cases} \Rightarrow d^2 f\left(-2/3, -2\right) = 12dx^2 + 2dy^2 \Rightarrow P_2\left(-2/3, -2\right) \text{là cực tiểu}$$

VD: Tìm cực trị của các hàm

$f(x,y) = (x-1)^2 + 2y^2;\ f(x,y) = (x-1)^2 - 2y^2;\ f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

6. **Cực trị có điều kiện**

Định Nghĩa: Hàm $f(x,y)$ với đk $\varphi(x,y)$ (có đồ thị (δ)) đạt cực đại tại $M_0(x_0,y_0)$ nếu

+ $\varphi(x_0,y_0)=0$

+ $f(x,y)\le f(x_0,y_0)$ $\forall (x,y)\in D\cap(\delta)$ (D lân cận của $M(x_0,y_0)$)

Định Lý (ĐK cần của cực trị có đk)

Xét $f(x,y)$ với đk $\varphi(x,y)=0$ thỏa các đk

+ $f(x,y)$, $\varphi(x,y)=0$ khả vi

+ $\varphi_x'(x_0,y_0)\neq 0$, $\varphi_y'(x_0,y_0)\neq 0$

+ $f(x,y)$ với đk $\varphi(x,y)=0$ đạt cực trị tại $M_0(x_0,y_0)$.

Khi ấy $\exists\lambda:(*)\begin{cases} f_x'(x_0,y_0)+\lambda\varphi_x'(x_0,y_0)=0\\ f_y'(x_0,y_0)+\lambda\varphi_y'(x_0,y_0)=0\\ \varphi(x_0,y_0)=0\end{cases}$ λ _nhân tử Lagrange

Định Lý (ĐK đủ)

Cho $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$ có đạo hàm riêng cấp 2 liên tục trong lân cận $M_0(x_0,y_0)$ và thỏa (*).

Xét $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$: hàm Lagrange

Bước 1: $\begin{cases} L_x'(x_0,y_0)=0\\ L_y'(x_0,y_0)=0\Rightarrow(x_0,y_0,\lambda) \text{ điểm dừng của hàm Lagrange}\\ \varphi(x_0,y_0)=0\end{cases}$

Đưa hàm cực trị có điều kiện $\to$ không điều kiện

Bước 2: Xét $\begin{cases} d^2L(x_0,y_0,\lambda)=L_{xx}''(x_0,y_0,\lambda)dx^2+2L_{xy}''(x_0,y_0,\lambda)dxdy+L_{yy}''(x_0,y_0,\lambda)dy^2\\ d\varphi(x_0,y_0)=\varphi_x'(x_0,y_0)dx+\varphi_y'(x_0,y_0)dy=0 \quad (**)\end{cases}$

+Nếu $d^2L(x_0,y_0,\lambda)$ xác định dương với (**) $\to$ M_0 cực tiểu của $f(x,y)$ với đk $\varphi(x,y)=0$

+Nếu $d^2L(x_0,y_0,\lambda)$ xác định âm với (**) $\to$ M_0 cực đại của $f(x,y)$ với đk $\varphi(x,y)=0$

+ Nếu $d^2L(x_0,y_0,\lambda)$ không xác định dấu $\to$ M_0 không là điểm cực trị của $f(x,y)$

VD₁: $f(x,y)=x^2+y^2$ đk: $\varphi(x,y)=x+y-2=0$

Cách 1:Xét hàm Lagrange: $L(x,y)=x^2+y^2+\lambda(x+y-2)$

B1: Tìm điểm dừng của hàm Lagrange

$$\begin{cases} L'_x=2x+\lambda=0 \\ L'_y=2y+\lambda=0 \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=-2x \\ \lambda=-2y \\ x=2-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ \lambda=-2x \\ y=2-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ \lambda=-2 \\ y=1 \end{cases}$$

Điểm P(1,1) là điểm dừng của hàm Lagrange ứng với $\lambda=-2$

B2: Xét dấu $d^2L(1,1,-2)$ với điều kiện $d\varphi=\varphi'_x dx+\varphi'_y dy=0$

Ta có: $\varphi(x,y)=x+y-2=0 \Rightarrow d\varphi=dx+dy=0 \Rightarrow d\varphi(1,1)=dx+dy=0$

$$\begin{cases} L''_{xx}=2 \\ L''_{xy}=0 \\ L''_{yy}=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L''_{xx}(1,1,-2)=2 \\ L''_{xy}(1,1,-2)=0 \\ L''_{yy}(1,1,-2)=2 \end{cases}$$

Xét $\begin{cases} d^2L(1,1,-2)=L''_{xx}(1,1,-2)dx^2+2L''_{xy}(1,1,-2)dxdy+L''_{yy}(1,1,-2)dy^2 \\ d\varphi(1,1)=dx+dy=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d^2L(1,1,-2)=2dx^2+2dy^2 \\ dy=-dx \end{cases} \Rightarrow d^2L(1,1,-2)=4dx^2>0$$

Vậy $f(x,y)$ đạt cực tiểu tại $M_0(1,1)$ với điều kiện $\varphi(x,y)=x+y-2=0$

C2: Thay $y=2-x$ vào $f(x,y)=f(x)=x^2+(2-x)^2=2x^2-4x+4=2(x^2-2x+2)$

$f'(x)=4x-4=0 \Rightarrow x=1$, $f''(x)=4 \Rightarrow f''(1)=4>0$

Hàm đạt cực tiểu tại $x=1, y=2-x=1$ và $f_{\min}=2$

VD: Tìm cực trị hàm $z=xy$ với đk $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$

$$L(x,y)=xy+\lambda\left(\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}-1\right)$$

$$
\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases} y + \dfrac{2\lambda x}{8} = 0(1) \\ x + \dfrac{2\lambda y}{2} = 0(2) \\ \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} = 1(3) \end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases} y - \dfrac{\lambda^2 y}{4} = 0 \\ x = -\lambda y \\ \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} = 1 \end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ \lambda = 2 \\ \lambda = -2 \end{array}\right. \\ x = -\lambda y \\ \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} = 1 \end{cases}
\Rightarrow
\left[\begin{array}{l}
(I)\begin{cases} y = 0 \\ x = -\lambda y \\ \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} = 1 \end{cases} \\
(II)\begin{cases} \lambda = 2 \\ x = -\lambda y \\ \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} = 1 \end{cases} \\
(III)\begin{cases} \lambda = -2 \\ x = -\lambda y \\ \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} = 1 \end{cases}
\end{array}\right.
$$

Giải hệ

$(2) \Rightarrow x = -\lambda y(4)$. Thay $x = -\lambda y$ vào (1) ta được $y + \dfrac{\lambda}{4}(-\lambda y) = 0$

$$\Rightarrow y\left(1 - \frac{\lambda^2}{4}\right) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ \lambda = \pm 2 \end{array}\right.$$

+Giải hệ (I) $\begin{cases} y = 0 \\ x = -\lambda y \\ \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ 0 = 1(!) \end{cases}$ hệ không có nghiệm_loại

+ $\lambda = 2 \Rightarrow x = -2y$. Thay vào (3) ta được

$$\frac{4y^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow x = -2y = -2(\pm 1) = \pm 2$$

Ta có 2 điểm dừng $M_1(2,-1), M_2(-2,1)$

+ $\lambda = -2 \Rightarrow x = 2y$. Thay vào (3) ta được

$$\frac{4y^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow x = 2y = 2(\pm 1) = \pm 2$$

Ta có 2 điểm dừng $M_3(2,1), M_4(-2,-1)$

$L''_{xx} = \frac{\lambda}{4}$, $\qquad L''_{xy} = 1$, $\qquad L''_{yy} = \lambda$

$$\boxed{d^2L = \frac{\lambda}{4}dx^2 + 2dxdy + \lambda dy^2 \quad (5)}$$

$$\boxed{d\varphi = \frac{x}{4}dx + ydy = 0 \quad (6)}$$

Xét dấu $d^2L(M)$ với đk (6)

* $\quad M_1(2,-1) \Rightarrow d\varphi(M_1) = \frac{1}{2}dx - dy = 0 \Rightarrow dy = \frac{1}{2}dx(*)$

Thay (*) và $\lambda = 2$ vào (5) $d^2L = \frac{1}{2}dx^2 + 2dx\left(\frac{1}{2}dx\right) + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 dx^2 = 2dx^2 > 0$

Do đó z đạt cực tiểu tại M_1, $z(M_1) = -2$

* $\quad M_2(-2,1) \Rightarrow d\varphi(M_2) = -\frac{1}{2}dx + dy = 0 \Rightarrow dy = \frac{1}{2}dx(**)$

Thay (*) và $\lambda = 2$ vào (5) $d^2L = \frac{1}{2}dx^2 + 2dx\left(\frac{1}{2}dx\right) + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 dx^2 = 2dx^2 > 0$

Do đó z đạt cực tiểu tại M_2, $\Rightarrow z(M_2) = -2$

* $\quad M_3(2,1) \quad \lambda = -2 \Rightarrow d\varphi(M_3) = \frac{1}{2}dx + dy = 0 \Rightarrow dy = -\frac{1}{2}dx(***)$

Thay (***) và $\lambda = -2$ vào (5)

$$d^2L = -\frac{1}{2}dx^2 + 2dx\left(-\frac{1}{2}dx\right) - 2\left(\frac{1}{4}dx^2\right) = -\frac{1}{2}dx^2 - dx^2 - \frac{1}{2}dx^2 = -2dx^2 < 0$$

Do đó z đạt cực đại tại M_3, $z(M_3) = 2$

* $\quad M_4 \Rightarrow z_{\max} = z(M_4) = 2$

7. Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm trên miền đóng, bị chặn

Tìm GTLN, GTNN trong miền G compact (đóng, bị chặn)

\+ $\quad$ Nếu f đạt cực trị tại M trong G $\Rightarrow$ cực trị (tự do)

+ Nếu f đạt cực trị tại N trên biên G $\Rightarrow$ cực trị (có đk)

Cách giải:

+ Tìm các điểm nghi ngờ có cực trị trong G.(các điểm dừng (M_1, M_2, M_3))

+ Tìm các điểm nghi ngờ có cực trị trên biên G (N_1, N_2)

So sánh $f(M_1), f(M_2), f(M_3), f(N_1), f(N_2)$ tìm max, min

VD$_1$: $z = x^2 y(2 - x - y)$ trong miền giới hạn bởi $x = 0, y = 0, x + y = 6$

- Trong G:

  $z'_x = 4xy - 3x^2 y - 2xy^2 = xy(4 - 3x - 2y)$

  $z'_y = 2x^2 - x^3 - 2x^2 y = x^2(2 - x - 2y)$

  Vì tìm cực trị $M(x_0, y_0)$ bên trong G $\Rightarrow x_0 > 0, y_0 > 0$

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 3x - 2y = 0 \\ 2 - x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 3x + x - 2 = 0 \\ 2y = 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M_1\left(1, \frac{1}{2}\right) \in G$$

- Trên biên

  a/ $OA \to y = 0 \Rightarrow z = 0$

  b/ $OB \to x = 0 \Rightarrow z = 0$

  c/ $AB : x + y = 6$

  Cách 1: $L(x, y, \lambda) = x^2 y(2 - x - y) + \lambda(x + y - 6)$

$$\begin{cases} L'_x = 4xy - 3x^2 y - 2xy^2 + \lambda = 0 \\ L'_y = 2x^2 - x^3 - 2x^2 y + \lambda = 0 \\ x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x(6 - x) - 3x^2(6 - x) - 2x(6 - x)^2 + \lambda = 0 \\ 2x^2 - x^3 - 2x^2(6 - x) + \lambda = 0 \\ y = 6 - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 2x^2 + 48x + \lambda = 0 \\ \lambda = 10x^2 - x^3 \\ y = 6 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x^2 + 48x = 0 \\ y = 6 - x \\ \lambda = 10x^2 - x^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \quad \vee \quad x = 4 \\ y = 6 - x \\ \lambda = 0; \lambda = 96. \end{cases}$$

$\Rightarrow M(0, 6)\_\lambda = 0, N(4, 2)\_\lambda = 96$

$\Rightarrow f(M) = f(0,6) = 0, f(N) = f(4,2) = -128$

Cách 2: Thay $y = 6 - x$ vào $z = x^2(6-x)(2-x-y) = x^2(6-x)(-4) = 4x^3 - 24x^2$

$z' = 12x^2 - 48x = 0 \Leftrightarrow 12x(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 6 \\ y = 2 \end{cases}$ $\quad M_2(0,6),\ M_3(4,2)$

$z(M_1) = z\left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \to \text{Max},\ z(M_2) = z(0,6) = 0,$

$z(M_3) = z(4,2) = -8.16 = -128 \to \text{Min}$

$z(OA) = z(OB) = 0$

VD$_2$: Tìm GTLN, GTNN của $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$ trong $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\}$

- Tìm điểm dừng của hàm f trong D tức là $x^2 + y^2 < 1$

  $\begin{cases} f'_x = 2x - 1 = 0 \\ f'_y = 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2}, y = 0 \in D,\ M_1\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ thỏa $x^2 + y^2 < 1$

- Tìm điểm dừng trên biên $x^2 + y^2 = 1$

  Xét $L = x^2 + 2y^2 - x + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

  $\begin{cases} L'_x = 2x - 1 + 2\lambda x = 0 & (1) \\ L'_y = 4y + 2\lambda y = 0 & (2) \\ x^2 + y^2 = 1 & (3) \end{cases}$

  Từ (2): $2y(2+\lambda) = 0 \Leftrightarrow y = 0, \lambda = -2$

  Từ (3): $y = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow M_2(1,0), M_3(-1,0)$: là 2 điểm dừng

- $\lambda = -2 \overset{(1)}{\Rightarrow} 2x - 1 - 4x = 0 \Leftrightarrow -2x = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \overset{(3)}{\Rightarrow} y^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

  Ta có 2 điểm dừng $M_4\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), M_5\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$f(M_1) = f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \to \text{Min}$

$f(M_2) = f(1,0) = 0$

$f(M_3) = f\left(-1,0\right) = 2$

$f(M_4) = f\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}+2.\frac{3}{4} = \frac{3}{4}+\frac{6}{4} = \frac{9}{4} \to \text{Max}$

$f(M_5) = f\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}+2.\frac{3}{4} = \frac{3}{4}+\frac{6}{4} = \frac{9}{4}$

GTNN của $f(x,y)$ là $-\frac{1}{4}$ đạt tại M_1

GTLN của $f(x,y)$ là $\frac{9}{4}$ đạt tại M_3, M_4

VD: $z = 2x^2 + y^2 - 2$ $\qquad D = \left[0,1\right]\left[-1,2\right]$

* Trong D: $\begin{cases} z'_x = 4x = 0 \\ z'_y = 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $\qquad M_0(0,0) \notin D$

* Biên D:

$AB: y = -1 \Rightarrow z = 2x^2 - 1 \Rightarrow z'_x = 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$BC: x = 1 \Rightarrow z = y^2 \Rightarrow z'_y = 2y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Rightarrow M_1(1,0) \Rightarrow f(1,0) = 0$

$CD: y = 2 \Rightarrow z = 2x^2 + 2 \Rightarrow z'_x = 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow (0,2) \equiv D$

$AD: x = 0 \Rightarrow z = y^2 - 2 \Rightarrow z'_y = 2y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Rightarrow (0,0) \Rightarrow M_2(0,0) \Rightarrow y(0,0) = -2$

$A(0,-1) \Rightarrow f(0,1) = -1$
$B(1,-1) \Rightarrow f(1,-1) = 1$
$C(1,2) \Rightarrow f(1,2) = 4 \to Max$
$D(0,2) \Rightarrow f(0,2) = 2$
$M_1(1,0) \Rightarrow f(1,0) = 0$
$M_2(0,0) \Rightarrow f(0,0) = -2 \to Min$